Correction Devoir commun 1ère S1-S3 Avril 2018

Exercice 1 :

1. Figure

2. Soit M(x ; y) un point du plan.

M ϵ (AB) ⇔ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

⇔ $1\times(x-1) - 4(y-1) = 0$

⇔ $x - 4y + 3 = 0$ (AB) : $x - 4y + 3 = 0$

3. (d) et (AB) sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (AB).

Une droite parallèle à (AB) aura une équation de la forme : $x - 4y + d = 0$. Soit (d) cette droite.

C ϵ (d) ⇔ $x_C - 4y_C + d = 0$ ⇔ $2-16 + d = 0$ ⇔ $d = 14$

Une droite (d) parallèle à (AB) passant par C a pour équation (d) : $x - 4y + 14 = 0$.

4. Construction

5. a) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ⇔ $\begin{pmatrix}x_E-1\\y_E-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{cases}x_E = 10\\ y_E = 6\end{cases}$ Donc E(10 ; 6)

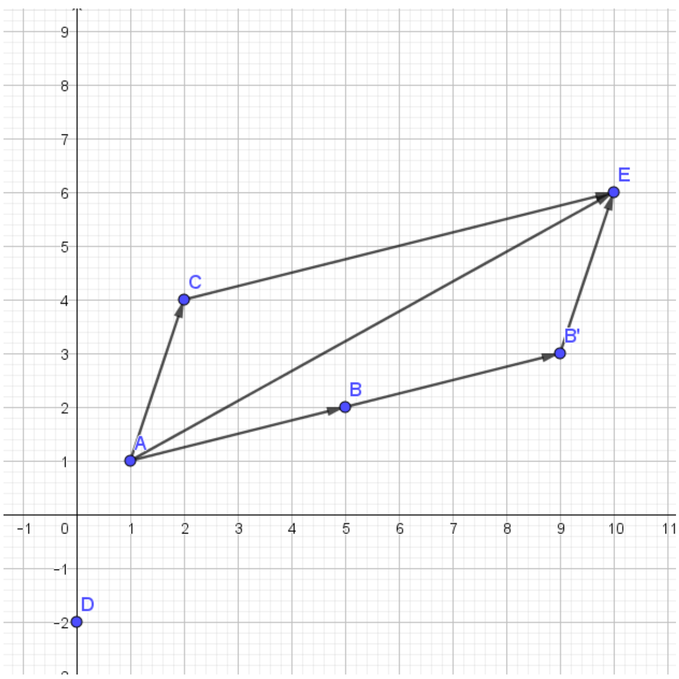
$x_E - 4y_E + 14 = 10 - 24 + 14 = 0$, donc E ϵ (d) .

b) D est le symétrique de E par rapport à B ⇔ $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BD}$ ⇔ $\begin{pmatrix}5-10\\2-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_D-5\\y_D-2\end{pmatrix}$

⇔ $\begin{cases}x_D = 0\\ y_D = -2\end{cases}$ Donc D(0 ; - 2)

D ϵ (AC) ⇔ $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Or $-1\times3 = -3\times1$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Exercice 2 :

Partie A

1) f (x)=2 x ² −5 x+3 = 2 ($x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$) = $2[(x-\frac{5}{4}x)^2-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}]$

= $2(x-\frac{5}{4}x)^2-\frac{25}{8}+3=2(x-\frac{5}{4}x)^2-\frac{1}{8}$

2) D'après la forme canonique, $S(\frac{5}{4};-\frac{1}{8})$

3) a = 2 > 0 , donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{8}$	↗

(inutile d'utiliser la dérivation).

4) Avec l'axe des ordonnées : x = 0 : f(0) = 3 donc (P) coupe l'axe des ordonnées en (0;3).

Avec l'axe des abscisses : y = 0 2x² – 5x + 3 = 0

Δ = 25 – 4*3*2 = 1 > 0 , il y a 2 racines distinctes :

$x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{4}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(P) coupe l'axe des abscisses aux point (1;0) et ($\frac{3}{2};0$)

Partie B

2) M(x;y) est un point d'intersection de (D_m) et de (P) si et seulement si ses coordonnées vérifier les équations de (D_m) et de (P).

Donc y = -2x + m et y = 2x² – 5x + 3

Donc 2x² – 5x + 3 = -2x + m

2x² – 3x + (3-m) = 0

Le nombre de solutions de cette équation donne le nombre de points d'intersection.

Δ = 9 – 4*2*(3-m) =9 - 24 + 8 m = 8 m -15

8m – 15 < 0 pour m < $\frac{15}{8}$, donc :

Si m < $\frac{15}{8}$, alors Δ < 0 :(D_m) et (P) n'ont aucun point d'intersection.

Si m = $\frac{15}{8}$, alors Δ =0 :(D_m) et (P) ont un point d'intersection.

Si m > $\frac{15}{8}$, alors Δ >0 :(D_m) et (P) ont deux points d'intersection.

3)m = $\frac{15}{8}$, alors il y a un point d'intersection, son abscisse est solution de l'équation 2x² – 3x + (3-m) = 0

2x² – 3x + $\frac{9}{8}$ = 0

Δ =0 (sans calcul, devinez pourquoi...)

Donc $x=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}$ et $y=-2x+\frac{15}{8}=\frac{-3}{2}+\frac{15}{8}=\frac{3}{8}$

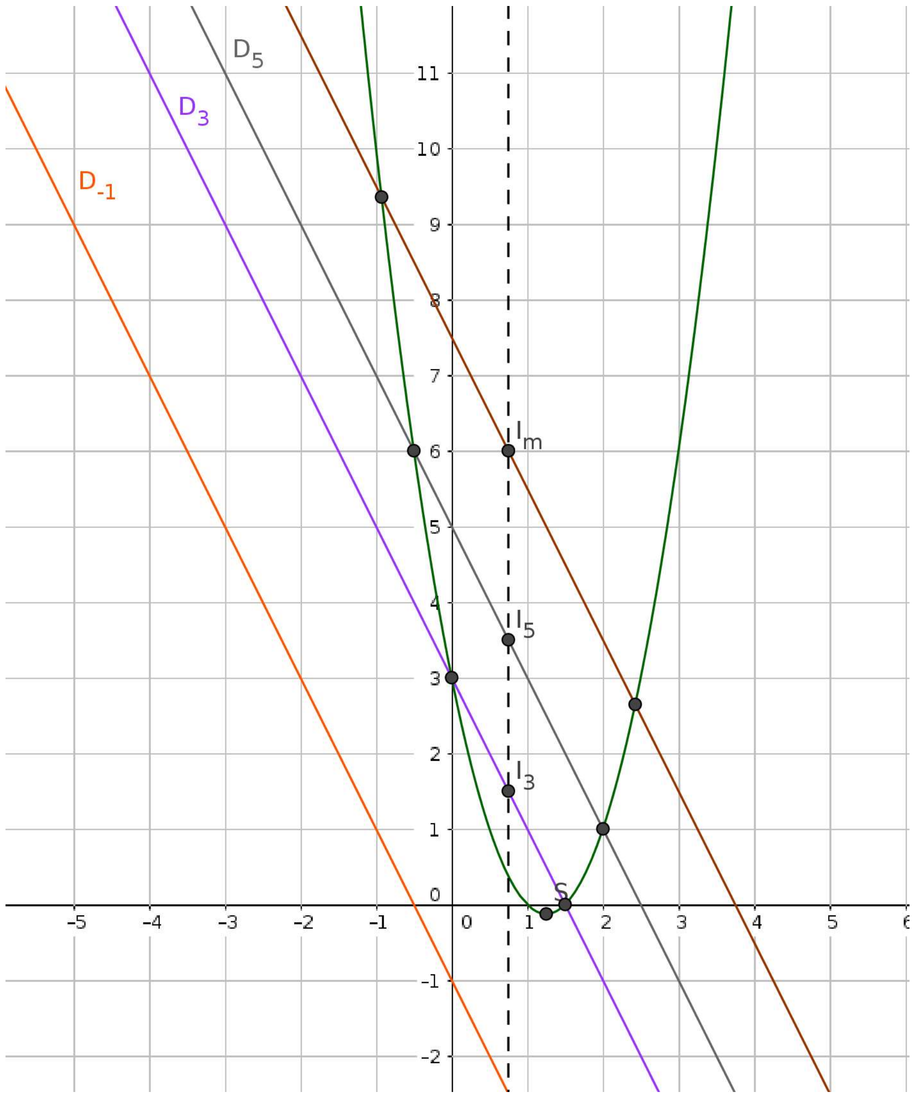
4) b)

L'abscisse de I_m vérifie $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ où x_1 et x_2 sont les solutions de $2x^2 - 3x + (3-m) = 0$

$x_1=\frac{3+\sqrt{\Delta}}{4}$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{\Delta}}{4}$, donc

$x=\frac{3}{2}$ (il suffit d'écrire le calcul).

Tous les points I_m sont donc situés sur la droite verticale d'équation $x=\frac{3}{2}$



Correction Exercice 3 :

1) Il y a 1 boule rouge sur 5 donc p = $\frac{1}{5}$

2) La probabilité de perdre au premier tirage est $\frac{4}{5}$.

Celle de gagner au 2eme tirage est $\frac{1}{5}$

Donc la probabilité demandée est $\frac{4}{5}*\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

3) $u_1=2$; $u_2=4$; $u_3=8$; $u_4=16$

$v_1=2$; $v_2=2+4=6$; $v_3=6+8=14$; $v_4=14+16=30$

$g_1=4-2=2$; $g_2=8-6=2$; $g_3=16-14=2$; $g_4=32-30=2$

4) La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2 car on double la mise à chaque partie.

5) $u_n=2^n$

6) v_n est la somme des premiers termes d'un suite géométrique de raison 2

$$v_n=v_1\times\frac{2^n-1}{2-1}=2\times\frac{2^n-1}{1}=2^{n+1}-2$$

7) $g_n=2\times u_n-v_n=2\times 2^n-(2^{n+1}-2)=2^{n+1}-2^{n+1}+2=2$

8) Il faut donc regarder la suite (v_n). On a $v_4=30 ; v_5=62$. Il peut donc jouer au maximum 4 fois.

9) On a déjà calculé p(X=1) et p(X=2) à la première question.

p(X=3) = $(\frac{4}{5})^2*\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$ p(X=4) = $(\frac{4}{5})^3*\frac{1}{5}=\frac{64}{625}$

p(X=0) = $(\frac{4}{5})^4=\frac{256}{625}$

10) Si on gagne lors d'une des 4 parties, Y = 2
Si on perd les 4 parties : Y = - 30

p(Y=-30) = p(X = 0) = $\frac{256}{625}$ donc p (Y = 2) = $1-\frac{256}{625}=\frac{369}{625}$

Donc E(Y) = -30 * $\frac{256}{625}$ + 2 * $\frac{369}{625}$ ≈ -11,1

V(Y) = $\frac{256}{625}$ (-11,1 + 30)² + $\frac{369}{625}$ (-11,1 – 2)² ≈ 247, 63 et σ(Y) ≈ 15,7

11) a)La probabilité de ne pas avoir gagné au bout de n parties est : $(\frac{4}{5})^n$

BONUS b) On cherche à la calculatrice $(\frac{4}{5})^n$ < 0,1 , on trouve N = 11

BONUS c) On cherche la mise v_1 pour que v_{11} soit inférieur ou égal à 50.

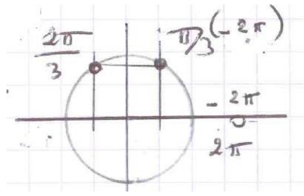
$v_{11} = v_1*\frac{2^{11}-1}{2-1}=v_1\times(2047)$ v_1 *2047 ≤ 50 donc $v_1\leq\frac{50}{2047}$ ≈ 0,024

Il faut donc miser 2 centimes d'euros pour avoir une probabilité au moins égale à 90 % de gagner... 2 centimes.

Exercice 4 (1ère S3) :

Partie A :

1) a) sin(2x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇔ 2x = $\frac{\pi}{3}$ + 2kπ ou 2x =$\pi - \frac{\pi}{3}$ + 2kπ avec k un réel.

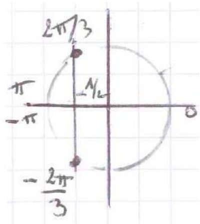


⇔ 2x = $\frac{\pi}{3}$ + 2kπ ou 2x = $\frac{2\pi}{3}$ + 2kπ

⇔ x = $\frac{\pi}{6}$ + 2kπ ou x = $\frac{\pi}{3}$ + 2kπ

Pour les différentes valeurs de k : -1, 0, 1 etc … Les valeurs dans [-π ; π [sont : { $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$}

b) cos($\pi - x$) = $\frac{1}{2}$ ⇔ - cos(x) = $\frac{1}{2}$

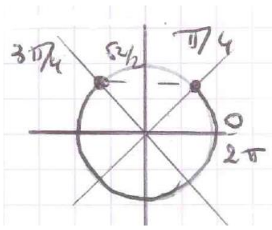


⇔ cos(x) = $-\frac{1}{2}$

⇔ x = $\frac{2\pi}{3}$ + 2kπ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$ + 2kπ

Pour les différentes valeurs de k : -1, 0, 1 etc … Les valeurs dans [-π ; π [sont : { $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$}

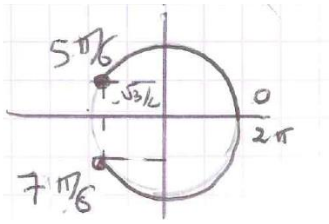
2) a) sin(x) ≤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇔ x ϵ [0 ; $\frac{\pi}{4}$] ∪ [$\frac{3\pi}{4}$; 2π [



b) -2$\sqrt{3}$ cos(x) < 3 ⇔ cos(x) > $\frac{3}{-2\sqrt{3}}$

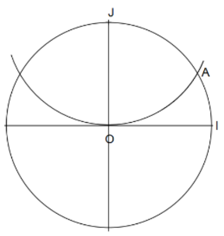
⇔ cos(x) > $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇔ x ϵ [0 ; $\frac{5\pi}{6}$ [∪] $\frac{7\pi}{6}$; 2π [.



Partie B :

1)



2) ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OA}$) = $\frac{\pi}{6}$ + 2kπ donc x_A = cos($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et y_A = sin($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{1}{2}$

I(0,1). B milieu de [IA] donc $\begin{cases} x_B = \frac{x_I + x_A}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y_B = \frac{y_I + y_A}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$ B($\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; $\frac{1}{4}$)

3) OB² = ($\frac{2+\sqrt{3}}{4}$)² + ($\frac{1}{4}$)² = $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ donc OB = $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

4) Le triangle AOI étant isocèle en O, B milieu de [IA] donc (OB) est la bissectrice de ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OA}$)

Alors ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OA}$) + 2kπ = $\frac{\pi}{12}$ + 2kπ

(OB) est aussi la hauteur issue de O, donc OBI est un triangle rectangle en B.

cos($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{OB}{OI}$ = OB . Soit cos($\frac{\pi}{12}$) = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 4 : 1ère S1

1) On fait Pythagore : $\frac{h^2}{4}$ + r² = R² =36 donc r² = 36 – $\frac{h^2}{4}$ et r = $\sqrt{36-\frac{h^2}{4}}$

$V_1(h)=\pi r^2 h=\pi(36-\frac{h^2}{4})h$. V_1 est définie pour h allant de 0 à 12 (= diamètre de la boule)

2) $V_1(h)=\pi(36h-\frac{h^3}{4})$

V_1 est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur son ensemble de définition et $V'_1(h)=\pi(36-\frac{3h^2}{4})$

$(36-\frac{3h^2}{4})$ est un polynôme du second degré.

Δ = 0 – 4 * (- $\frac{3}{4}$)*36 = 108 donc on a 2 racines

$x_1=\frac{0-\sqrt{108}}{2*\frac{-3}{4}}=\frac{6\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=4\sqrt{3}$ et $x_2=-4\sqrt{3}$

a = $\frac{-3}{4}$ < 0

x	0		$4\sqrt{3}$		12
$V'1(x)$		$+$	0	$-$	
$V1(x)$	0	$\nearrow$	$96\pi\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Le volume maximum est obtenu pour $h=4\sqrt{3}$

3) $V_1(4\sqrt{3})=\pi(36*4\sqrt{3}-\frac{(4\sqrt{3})^3}{4})=\pi(144\sqrt{3}-48\sqrt{3})=96\pi\sqrt{3}$

le rayon est alors de : r = $\sqrt{36-\frac{h^2}{4}}=\sqrt{36-12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

4) Le volume de la boule est : $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi 6^3=288\pi$

Le taux de remplissage de la boule est donc :

$$\frac{96\pi\sqrt{3}}{288\pi}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 58\ \%$$