Lycée Jean Mermoz

DEVOIR COMMUN
DE
MATHÉMATIQUES

1ère S1 – S3

Durée de l'épreuve : 4 heures

Samedi 14 avril 2018

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Tous les candidats doivent traiter les exercices 1, 2 et 3 obligatoirement.
Attention ! L'exercice 4 est à traiter selon la classe dans laquelle se trouve l'élève.

La feuille annexe sera retirée et UNIQUEMENT remise avec la copie.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice 1 : (6 points) ***Commun à tous les élèves***

Dans un repère du plan, on considère les points A(1 ; 1), B(5 ; 2) et C(2 ; 4).

1. Dans le repère orthonormé donné en Annexe 1 page 5 à rendre avec la copie, placer les points A, B et C.
2. Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB).
3. Déterminez une équation cartésienne de la droite (d) parallèle à (AB) passant par C.
4. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
5. Montrez par la méthode qui vous convient le mieux :
   a) que E appartient à (d).
   b) que le symétrique D de E par rapport à B appartient à la droite (AC).

Exercice 2 : (10 points) ***Commun à tous les élèves***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2-5x+3$ et (P) sa courbe représentative dans un repère du plan.

Partie A

1. Donnez la forme canonique de f.
2. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f.
3. Dressez le tableau de variations de f . Justifier.
4. Déterminez les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les deux axes du repère.

Partie B

Pour tout nombre réel m, on considère la droite D_m d'équation $y = -2x + m$.

1 . Sur l'Annexe 2 page 5, à rendre avec la copie, construire les droites D_{-1}, (pour $m = -1$) , D_3 (pour $m = 3$) et D_5 (pour $m = 5$).

2. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (D_m) et de (P).
3. Dans le cas où $m = \frac{15}{8}$, précisez les coordonnées du point d'intersection entre D_m et la parabole (P) .
4. Lorsque D_m coupe la parabole en deux points, on note A_m et B_m ces deux points d'intersection. On appelle I_m le milieu de segment [A_m B_m].
   a) Placer I_3 et I_5.
   b) Montrer que tous les points I_m sont alignés sur une droite dont on donnera l'équation.

Exercice 3 : (16 points) ***Commun à tous les élèves***

Il y a dans un sac 1 boule rouge et 4 boules noires indiscernables au toucher.

Une expérience consiste à tirer une boule au hasard dans le sac. Si c'est la rouge qui est tirée, on gagne le double de sa mise, si c'est une noire, on perd sa mise.

1. Quelle est la probabilité de gagner la première partie ?
2. Quelle est la probabilité de gagner la $2^{ème}$ partie après avoir perdu la première ?
3. Latyr qui est plus malin que les autres a trouvé une manière de gagner à coup sur avec la statégie suivante :
   - Il arrête de jouer dès la première fois qu' il gagne.
   - A chaque fois qu'il perd, il double sa mise.

Par exemple : Il décide de miser 2 € la première partie.

Soit il gagne et il remporte 4 € , donc son gain est de 4 – 2 = 2 €

Soit il perd et mise 4 € euros à la $2^{ème}$ partie.

Soit il gagne la $2^{ème}$ partie : Il remporte 8 € et son gain global est de 8 – (2+4) = 2 €

Soit il perd la $2^{ème}$ partie et il mise 8 € à la $3^{ème}$ partie... et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il gagne.

Pour $n \geq 1$, on note u_n la mise à la *n-ième* partie, $v_n = u_1 + u_2 + .. u_n$ la somme totale des mises depuis le début , et $g_n = 2 * u_n - v_n$ le gain global depuis le début si on gagne à la *n-ième* partie.

On suppose qu'on a misé 2 € à la première partie.

Calculer les 4 premiers termes des suites $(u_n);(v_n) et (g_n)$.

4. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier brièvement.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
6. Exprimer v_n en fonction de *n*.
7. En déduire l'expression de g_n en fonction de *n*.
8. Latyr a 50 euros sur lui. Combien de partie au maximum peut-il jouer s'il mise 2 € à la première partie ?
9. On dispose de quoi miser pour au maximum 4 parties.

   On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang de la première partie gagnante.

   Si les 4 parties sont perdantes, la variable X prend la valeur 0.

   Ecrire la loi de probabilité de X.

10. On appelle Y la variable aléatoire représentant le gain global(positif ou négatif) à ce jeu par la méthode de Latyr .

a) Quelles valeurs la variable Y prend-elle ?

b) Déterminer la loi de probabilité de Y et montrer que son espérance vaut environ - 11,1.

c) En déduire la variance et l'écart type de Y. Un résultat obtenu à la calculatrice sera accepté.

11. Le but des questions suivantes est de déterminer, quelle mise de départ on doit jouer pour avoir une probabilité de gagner supérieure ou égale à 90 % , alors que l'on n'a que 50 € à miser au total.

a) Calculer la probabilité de ne pas avoir gagné au bout de n parties.

Questions Bonus :

b) En déduire à l'aide de la calculatrice le nombre N de parties à jouer pour avoir une probabilité de gagner d'au moins 90 % .

c) Quelle doit-être la mise de départ pour pouvoir jouer N parties ?

Exercice 4 : (8 points) ***Cet exercice ne doit être traité que par les élèves de 1ère S3.***

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué à l'aide d'un cercle trigonométrique :

a) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi ; \pi[$.

b) $\cos(\pi - x) = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi ; \pi[$.

2. Résoudre les inéquations suivantes dans $[0 ; 2\pi[$:

a) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $-2\sqrt{3}\cos(x) < 3$

Partie B

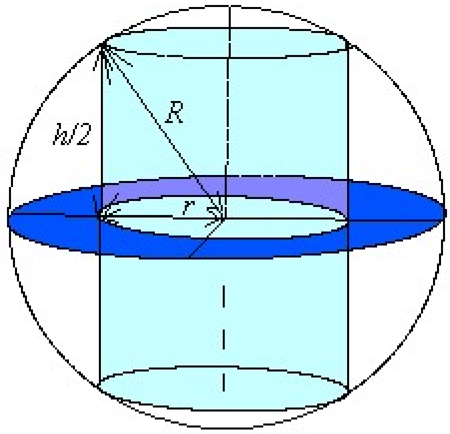
$\mathscr{C}$ désigne le cercle trigonométrique de centre O et le point I est le point de coordonnées (1 ; 0).

On note A le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad avec\, k \in \mathbb{Z}$. B est le milieu de [IA].

1. Compléter la figure sur l'Annexe 3 page 6.
2. Déterminer les coordonnées de A puis de B.
3. Calculer la distance OB.
4. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, et en utilisant le triangle OBI, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : (8 points) ***Cet exercice ne doit être traité que par les élèves de 1ère S1.***

Dans une boule de rayon R = 6 cm , on inscrit un cylindre.



On veut trouver le cylindre dont le volume est maximal

On rappelle les formules du calcul :

- du volume d'un cylindre :

V = $\pi r^2 h$ où r est le rayon de la base du cylindre et h sa hauteur.

- du volume d'une boule : V = $\frac{4}{3}\pi R^3$ où R est le rayon de la sphère.

1. a) Exprimer r en fonction de h.

   b) Prouver que V(h) le volume du cylindre en fonction de h est égal à : V(h) = $\pi\left(36-\frac{h^2}{4}\right)h$

   c) Donner l'ensemble de définition de V.

2. Dresser le tableau de variations de V et en déduire la valeur de h pour laquelle le volume du cylindre est maximal.

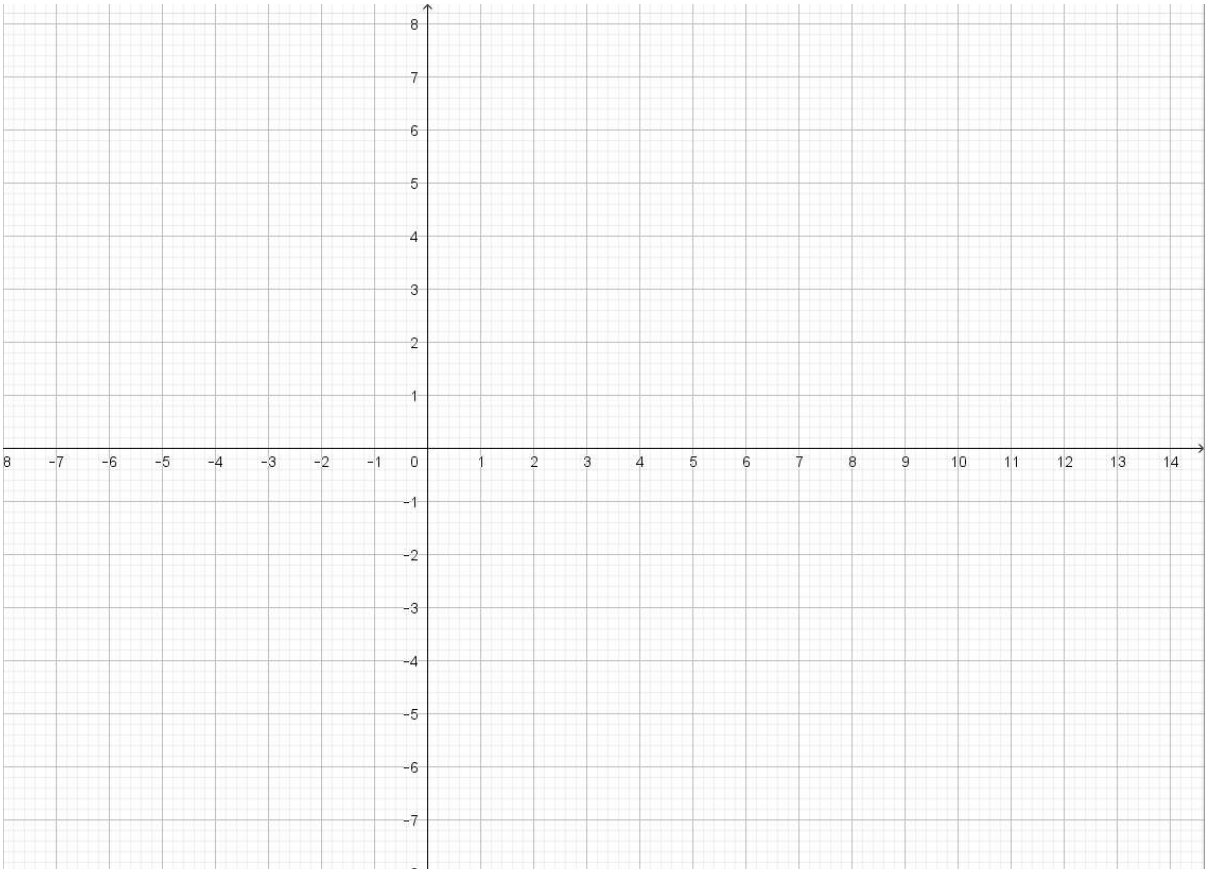
3. Calculer le volume maximal , ainsi que les dimensions du cylindre qui a ce volume.

4. On appelle taux de remplissage de la boule par un cylindre le pourcentage du volume de la boule occupé par le cylindre.
   Calculer le taux de remplissage maximal d'une boule par un cylindre.

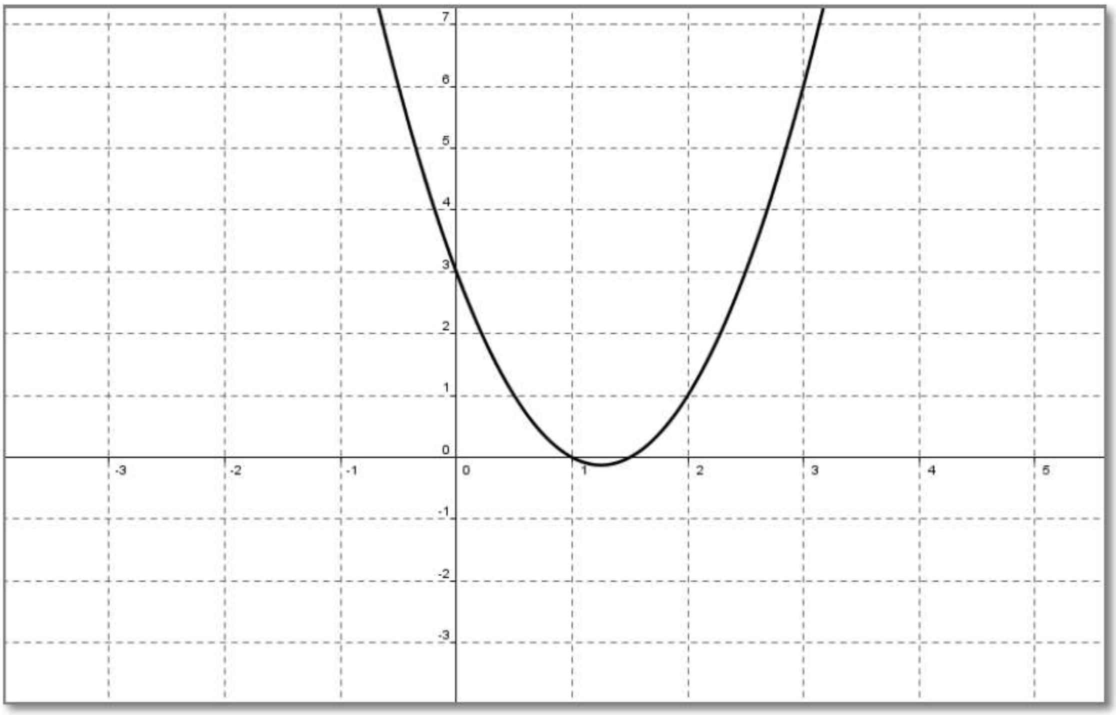
Feuille à détacher et à rendre avec la copie

NOM : **PRENOM :** **CLASSE :**

Exercice 1 : **<u>Annexe 1</u>**



Exercice 2 Partie B: **<u>Annexe 2</u>**



Annexe 3