Lycée Jean Mermoz

Classe de Première S

DEVOIR COMMUN
DE
MATHEMATIQUES

Samedi 16 Mai 2015

Durée de l'épreuve : 4 H 00

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il se compose de 4 exercices.
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

En page 6 figure une annexe qu'il faudra compléter, détacher du sujet et remettre avec la copie. Les feuilles de la copie seront numérotées et l'annexe portera le dernier numéro de la copie.

Le sujet ne doit pas être rendu avec la copie, mais conservé.

L'usage de la calculatrice est autorisé, dans le cadre de la réglementation en vigueur.

EXERCICE 1 **5 points**

Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé.
Toutes les questions sont indépendantes.

1. Soit (d) la droite passant par les points $A(-5;2)$ et $B(4;5)$.
   Donner un vecteur directeur de la droite (d) puis une équation cartésienne de cette droite.

2. Donner une équation de la droite (d') passant par $C(2;-3)$,
   et parallèle à la droite (d) d'équation cartésienne $2x - y + 2 = 0$.

3. Dans chacun des cas, déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).
   a) $(d_a) : 5x - 2y + 1 = 0$ b) $(d_b) : x - 5 = 0$ c) $(d_c) : y = 2x + 3$

4. Soit la droite (Δ) d'équation $2x + y + 3 = 0$.
   a. Déterminer la valeur de α pour laquelle $D(-2;\alpha)$ appartient à (Δ).
   b. Le point $E\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$ appartient-il à (Δ) ?

5. Soient les points $A(4;2)$, $B(7;-3)$ et $C(5;8)$.
   Déterminer une équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

   b. En déduire la résolution sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ de l'équation

$$2(\cos x)^2 - 3\cos x - 2 = 0$$

EXERCICE 2 **5 points**

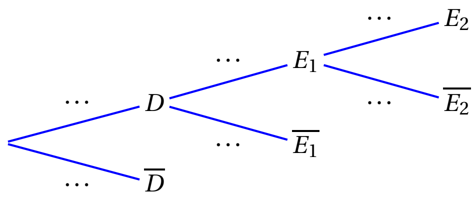
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les évènements suivants :

– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
– E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. On appelle n, le nombre total de candidats ayant postulé dans cette entreprise.

a. Justifier que la probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est égale à $1-0.93^n$

b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un nombre
Début de l'algorithme :	N prend la valeur 1
	Tant que $1-0.93^N < 0.999$ faire
	│ N prend la valeur $N+1$
	Fin Tant que
	Afficher N
Fin de l'algorithme	

Voici le résultat obtenu après avoir programmé cet algorithme sur un ordinateur :

```
***Algorithme lancé***
96
***Algorithme terminé***
```

Interpréter le résultat obtenu dans le cadre du problème qui nous occupe.

EXERCICE 3 **5 points**

Un camion doit faire un trajet de 150 km. On estime que sa consommation de gasoil en litres par heure est donnée par la formule $6+\dfrac{x^2}{300}$, où x désigne sa vitesse en km/h.

Le prix du gasoil et de 0.9 euros le litre et on paie le chauffeur 12 euros par heure.

L'objectif de ce problème est de déterminer la vitesse optimale du camion pour que le prix de la course soit minimal pour les employeurs du chauffeur.

1. Montrer que le prix en euros en fonction de la vitesse est déterminé par la fonction :

$$P(x)=\frac{2700}{x}+\frac{x}{2}$$

2. Après avoir justifié la dérivabilité de P sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, montrer que

$$P'(x)=\frac{x^2-5400}{2x^2}$$

3. Déterminer les variations de la fonction P sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

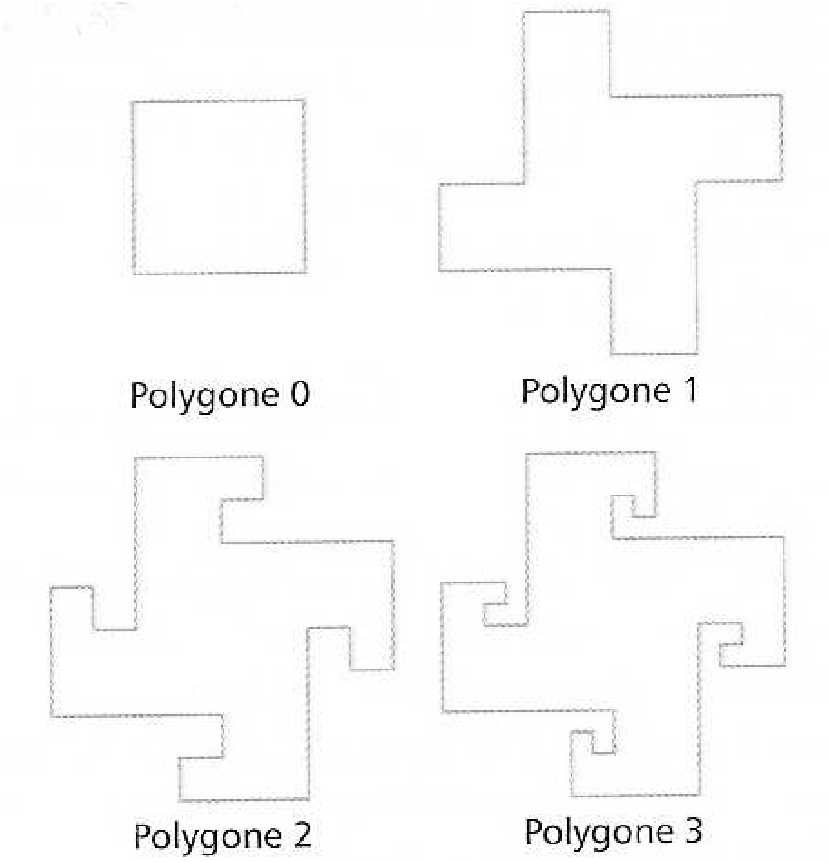
4. Déterminer l'équation de la tangente T_{30} à la courbe représentative de P au point d'abscisse $x=30$.

5. Construire soigneusement la tangente T_{30} puis la courbe représentative de P sur le graphique donné sur la feuille annexe (pour des raisons évidentes de sécurité, on se limitera à l'intervalle $]0\,;\,130[$).

6. Déterminer la vitesse optimale du camion pour que le prix de la course soit minimal.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le processus de construction suivant, à partir d'un carré, le côté de chacun des quatre carrés rajoutés mesurant la moitié de celui du carré précédent :



1. Le côté du carré initial mesure $c_0 = 10$ cm ; puis, pour $n \geq 1$, on note c_n la longueur du côté de chaque nouveau carré ajouté pour obtenir le polygone numéroté n.
   On a donc en particulier $c_1 = 5$ cm.
   Pour $n \geq 0$, on note p_n le périmètre du polygone numéroté n.
   On a donc en particulier $p_0 = 40$ cm et $p_1 = 80$ cm.
2. Déterminer les deux termes suivants de chacune des suites (c_n) et (p_n) correspondants aux polygones 2 et 3.
3. Déterminer une formule de récurrence puis une formule explicite pour la suite (c_n).
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$p_{n+1} = p_n + 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$u_n = \frac{p_n}{80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$$
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 2.
   b. Exprimer alors u_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$p_n = 120 - 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
6. Supposons que l'on ne puisse pas prolonger le processus au delà de carrés de 2 mm de côté. Quel est alors le périmètre du dernier polygone pouvant être construit ?

Annexe

NOM :

PRENOM :