Devoir Commun $1^{\text{ère}}$ S
février 2015

Attention, la $3^{\text{ème}}$ page est à compléter et à rendre avec la copie !

<u>Exercice 1 :</u> *(~8 points)*

Une entreprise produit du tissu. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètres, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise est donné en fonction de la longueur x par la formule : $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$

Le graphique donné en annexe donne la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{C}$. Les constructions demandées se feront sur cette annexe.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise pour la vente d'une quantité x est égale à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
   Expliquer, à la vue de ce tracé, pourquoi l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
   - **a.** Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation $y = 680x$. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice si le prix p du marché est égal à 680 euros.
   - **b.** On considère la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $B(x) = 680x - C(x)$.
     Démontrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 10] on a $B'(x) = -15(3x^2 - 16x - 12)$.
   - **c.** Etudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 10]. En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Etude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle]0 ; 10] par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Démontrer que pour tout x de l'intervalle]0 ; 10] on a : $C_M{}'(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.
2. **a.** Etudier le signe de $C_M{}'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle]0 ; 10] et en déduire le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle]0 ; 10].
   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Exercice 2 : *(~7 points)*

Une roue de loterie se compose de plusieurs secteurs identiques : trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (avec $n \geq 0$).
On fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.
- Si le secteur repéré est blanc, le joueur perd 12 €.
- Si le secteur repéré est vert, le joueur lance une seconde fois la roue :
    - Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 8 €.
    - S'il est blanc, il gagne 2 €.
    - S'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique (un gain peut être négatif !) du joueur.

Cas $n = 0$:

1. Faire un arbre de probabilités qui schématise cette expérience aléatoire dans ce cas.
2. En moyenne, quel gain peut-on espérer dans ce cas ?
3. Les événements $(X > 0)$ et $(X < 0)$ sont-ils équiprobables ? Justifier.

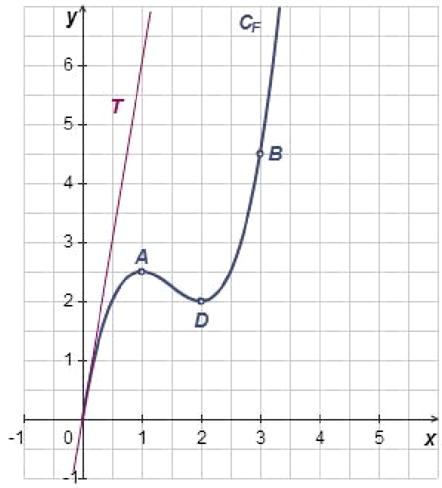
Cas général :

1. Faire un arbre de probabilités qui schématise cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{32n}{(n+7)^2}$.
4. Déterminer la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique de X est maximale.

Exercice 3 : *(~5 points)*

On considère sur la figure ci-contre :

- La courbe C d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$.
- La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
- Les points A, D et B de la courbe C d'abscisses respectives 1, 2 et 3.



On admet par ailleurs que les tangentes à la courbe C aux points A et D sont horizontales et que la tangente en B est parallèle à la droite T.

Pour chacune des questions de la page suivante, **une seule** des réponses proposées est correcte. Compléter la dernière colonne par la lettre correspondant à la bonne réponse. Une réponse correcte rapporte 1/2 point, pas de réponse 0 point et une réponse fausse enlève 1/4 point... Néanmoins la 1$^{\text{ère}}$ faute n'est pas pénalisée.

NOM : CLASSE :

QCM à compléter :

Question :	réponse a :	réponse b :	réponse c :	Rép:
1) Sur $[0,3]$ l'équation $f(x)=0$ a :	une seule solution	plusieurs solutions	aucune solution	
2) Sur $[0,+\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ a :	une seule solution	plusieurs solutions	aucune solution	
3) Le nombre dérivé $f'(2)$ est :	strictement positif	strictement négatif	nul	
4) La fonction f semble dérivable :	sur $[0,+\infty[$	sur $]0,+\infty[$	en 0 seulement	
5) Sur $[0,+\infty[$ la fonction dérivée f' :	est positive	est négative	change de signe	
6) Sur l'intervalle $[0,3]$ le maximum de la fonction f est :	1	3	4,5	
7) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DO}$ (où O est l'origine du repère) sont :	colinéaires	égaux	non colinéaires	
8) Un vecteur directeur de T est :	$\binom{-1/2}{-3}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{0}{6}$	
9) Une équation cartésienne de la tangente à la courbe C au point B est :	$y-6x-\frac{27}{2}=0$	$y-6x=0$	$y-6x+\frac{27}{2}=0$	
10) Les tangentes à la courbe C aux points A et D ont pour vecteur directeur :	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{-1/2}$	$\binom{10}{0}$	

ANNEXE : Courbe de l'exercice 1 à compléter :