

Devoir commun

24 février 2015

Mathématiques TES

Obligatoire et Spécialité

ATTENTION :

- La partie obligatoire commune à tous les élèves contient 3 pages de sujet (de la p.2 à la p.4). Les élèves n'ayant pas choisi l'option mathématique ont 3 heures pour réaliser ce sujet.
- **Pour les élèves ayant choisi la spécialité uniquement :**
 - **Faire les partie obligatoire et partie de spécialité (p.2 à p.6) sur des copies différentes à ne pas mélanger. Ces copies seront ramassées séparément.**
 - **La durée de l'épreuve avec spécialité est 3 h 45 min.**
- Il sera apporté une attention particulière à la qualité de rédaction et de présentation des copies (notamment la numérotation précise des réponses que vous donnerez).

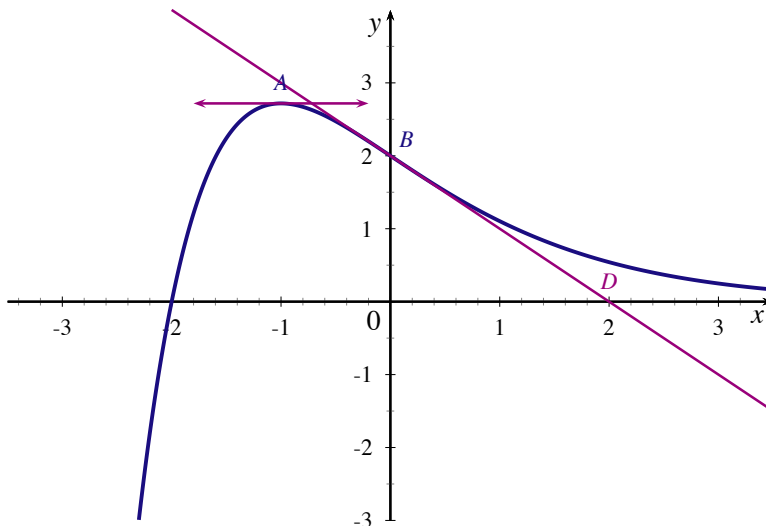
DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES TES – Samedi 24 février 2015-01-19
PARTIE COMMUNE

Exercice 1 :

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} est donnée ci-dessous.

La courbe C passe par les points $A(-1 ; e)$ et $B(0 ; 2)$ où $e = \exp(1)$.

La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD) , où D a pour coordonnées $(2 ; 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2 ; 3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$.
5. $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

Exercice 2 :

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

PARTIE B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

VARIABLES
$a, i, n.$
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n ,
a prend la valeur ...
SORTIE
Afficher a

3.
 - a) Trouver le rang n à partir duquel $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$
 - b) En donner une interprétation.

Exercice 3 :

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1.
 - a) Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?
 - b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.
 - c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2.
 - a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.
 - b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.
3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

Formule « avion + hôtel » : 390 €

Formule « train + hôtel » : 510 €

Option « visites guidées » : 100 €

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

Exercice 4 :

La courbe (C), donnée ci-dessous, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $[2 ; 9]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les points $A(3;e)$ et $B(4;2)$ appartiennent à cette courbe.

La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE 1 : lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x sur l'intervalle $[3 ; 9]$ a-t-on $f(x) \leq 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE 2 : étude de la fonction

La fonction f représentée ci-dessous, est la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 9]$ par $f(x) = (x - 2)e^{(-x+4)}$.

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[2 ; 9]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3 - x)e^{(-x+4)}$.
2. Sur l'intervalle $[2 ; 9]$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Calculer $f''(x)$.
Déterminer alors les coordonnées du point d'inflexion de (C).

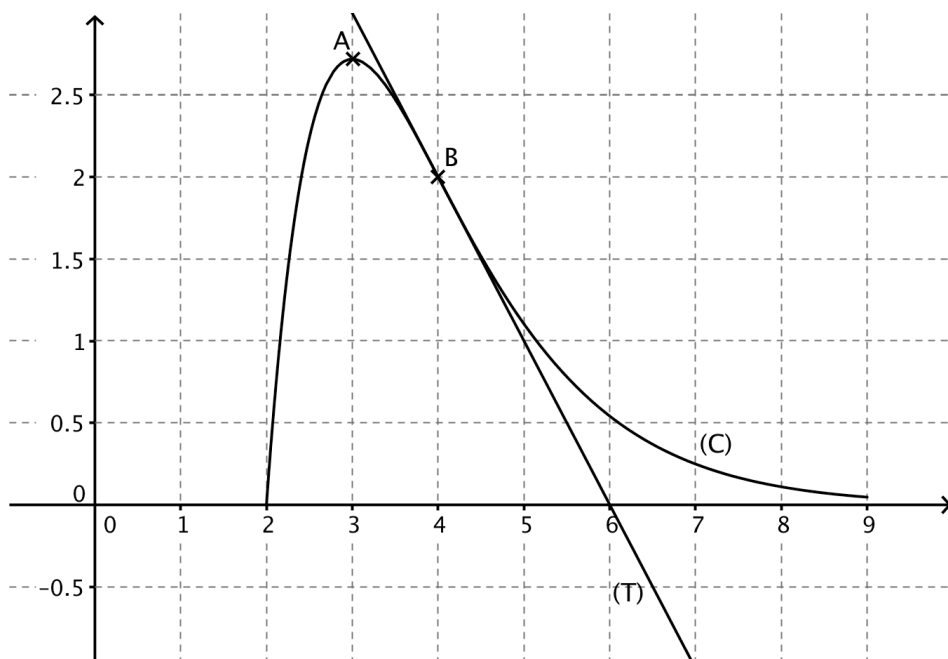
PARTIE 3 : étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour avec $2 \leq x \leq 9$.

Le bénéfice en milliers d'euro réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [2 ; 9]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 200 L et au plus 900 L.

On donnera les réponses arrondies à 1 € près.

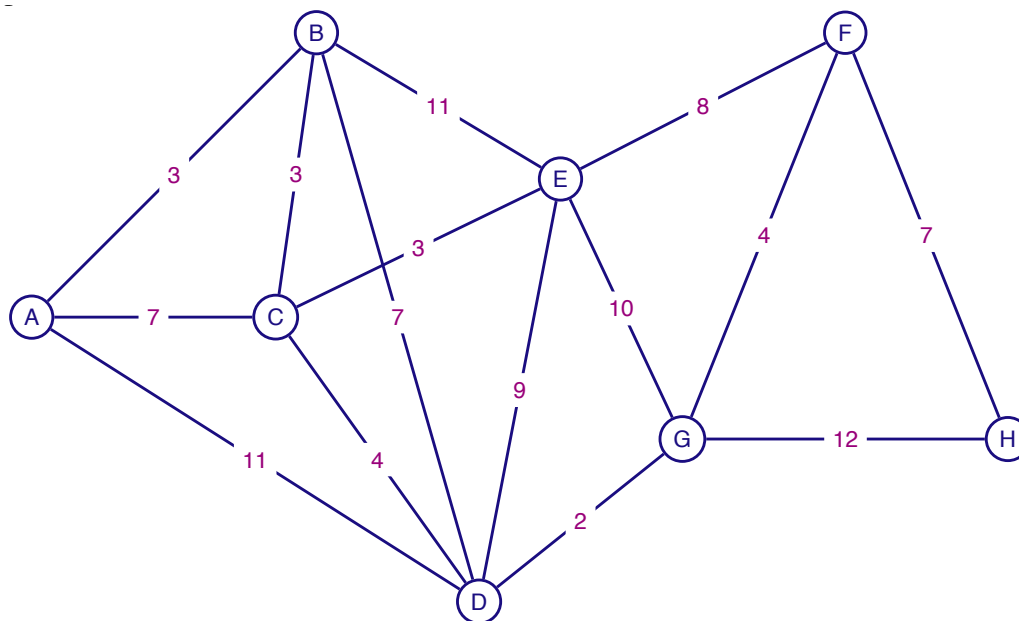
1. Calculer le bénéfice en euro réalisé sur la vente de 400 L.
2. Déterminer la quantité en litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal en euro.
Quel est ce bénéfice maximal en euro ?
3. Montrer qu'il existe un volume de vente en litre $\alpha \in [5 ; 6]$ tel que le bénéfice est égal à 1000 €. Donner une valeur approchée de α au litre près.
4. À partir de quelle quantité journalière aura-t-on un ralentissement de la baisse des bénéfices ?



PARTIE OPTION MATHÉMATIQUES
À RÉALISER SUR UNE COPIE DOUBLE SÉPARÉE
45 MINUTES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice de spécialité

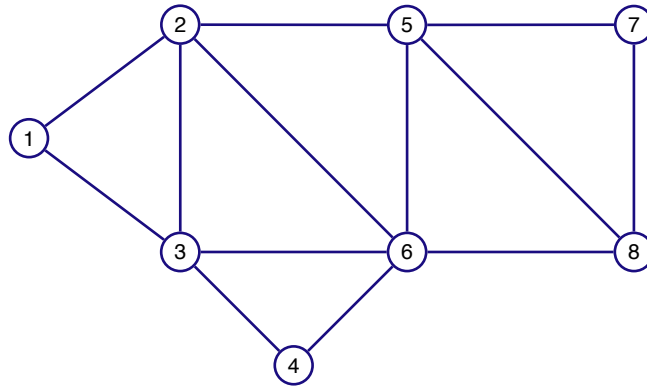
Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier », ainsi que les temps de trajet (en minutes) entre ces différents points, sont représentés par le graphe n°1. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.



Graphe n°1

1. Déterminer à partir du graphe n°1 :
 - a) Un sous-graphe complet d'ordre 4.
 - b) Un sous-graphe d'ordre 5.
 - c) Une chaîne non fermée de longueur 5.
 - d) Un cycle de longueur 3.
2. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Peut-il utiliser seulement trois couleurs? Justifier.
3. On appelle M la matrice associée au graphe n°1, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique.
Combien y-a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en quatre étapes? Justifier la réponse.
4. Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer un tel chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.

5. Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe n°2 (non pondéré) ci-dessous. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.



- a) Justifier que ce graphe est connexe.
b) Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 : lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier et donner un tel parcours.